Problème 18 : L'étang d'Ares

L'étang d'Ares est un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur des nombres entiers de mètres tous différents, inférieurs à 100 m et non multiples de 5. Chaque côté de cet étang est également le côté d'un terrain carré. Les quatre propriétaires de ces terrain, Matthieu, Mathurin, Mathilde et Mathias doivent les partager en parcelles de 100 m^2. Ils constatent qu'il leur reste à chacun la même surface inutilisée. Quelle est, au maximum, l'aire de l'étang d'Ares ?
On donnera la réponse en m^2, arrondie au centième.

Solution

Proposition 1

Le quadrilatère de côtés a,b,c,d de plus grande aire est celui qui est inscrit dans un cercle.

Démonstration : Une classique (et célèbre) application du multiplicateur de Lagrange, avec les deux variables α et γ (angles opposés du quadrilatère).

Fonction à maximiser : $f(\alpha, \gamma) = (ab \sin\alpha + cd \sin\gamma) / 2$

Liaison par la diagonale : $Д^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos\gamma$.

La condition du premier ordre donne facilement : $\mathrm{tg}\alpha = - \mathrm{tg}\gamma$ ou $\alpha + \gamma = \pi$.

Les angles opposés sont supplémentaires, le quadrilatère est donc bien inscrit dans un cercle. QED.

Proposition 2

L'aire A du quadrilatère inscrit de côtés a,b,c,d satisfait la formule
$16A^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(a^4+b^4+c^4+d^4)+8abcd$

Preuve : Calcul direct.

Proposition 3

Les entiers de 1 à 99, non-multiples de 5, sont groupés par quatre modulo 100, si on les élève au carré : (25-k,25+k,75-k,75+k).

Preuve : Devinée a posteriori :

Proposition 4

Pour a=25-k, b=25+k, c=75-k, d=75+k, on obtient pour A^2 la valeur $k^4 - 6250k^2 + 3515625$ dont le maximum, pour les valeurs entières de k entre 1 et 24, se trouve en k=1. L'aire maximale cherchée est donc la racine carrée de 3509376 = 24 x 26 x 74 x 76, approximativement 1873,332 m^2.

Curiosité : $k^4 - 6250k^2 + 3515625 = (25-k)(25+k)(75-k)(75+k)$. A mon avis, cette propriété n'est pas fortuite, et pourrait bien avoir donné naissance au problème, mais je n'ai pour l'instant aucune idée de son origine.

Réponse au problème : 1873,33 m^2.

François Sigrist
Chemin de Bel-Air 19
2000 Neuchâtel

Francois.Sigrist@unine.ch

Pour l'anecdote, le problème du quadrilatère inscrit est bien ancien.
C'est Werner Sörensen qui me l'a raconté, se remémorant le temps où il faisait passer les examens de maturité fédérale, et où la question figurait dans une épreuve. Le célèbre colonel Plancherel (un mathématicien de haut niveau), qui avait été son prof au Poly, était expert, et s'était plaint que le problème était beaucoup trop difficile pour une maturité.
Mais comme il se résout en deux lignes avec le multiplicateur de Lagrange...
J'ai moi-même eu l'enseignement du multiplicateur de Lagrange par Ferdinand Gonseth. Nous l'appelions le père Gonseth, il était déjà bien âgé, et ne voyait pratiquement rien. Ses deux assistants se sont relayés, un semestre chacun, pour écrire au tableau noir. Le premier était Jean-Jacques Loeffel, devenu prof de physique théorique à Lausanne, le deuxième Jean-Jacques Terrier, devenu prof à l'université de Montréal. Il fallait entendre l'extase du père Gonseth qui disait: il faut prendre le BON LAMBDA ! Je viens de revoir mes copains d'étude, ingénieurs de toutes les tendances, qui suivaient le cours en même temps que moi, ils me parlent encore du bon lambda du père Gonseth.