LES CHEMINS DU CERVEAU
Volume 3, mars 2010

Problèmes de la FFJM
Demi-finales suisses 13 mars 2010

Claude Villars

Corrigé et complété par
Daniel Collignon

Version du 28.03.2010

Préface

Les jeux mathématiques de la fédération française (FFJM), c'est régulier comme la venue du printemps. Et comme la venue du printemps, chaque fois on se réjouit de participer aux épreuves, histoire de faire travailler sa tête, trois heures de concentration, les oreilles rouges (tout organe sollicité se gorge de sang), et quand l'effort devient intense, le corps sécrète de ***l'endorphine***, l'hormone antistress, l'hormone du bonheur. Et ce bonheur perdure pour le restant du mois.

Il y a maintenant plus de dix ans que je suis accroché, ayant débuté en l'an 2000 avec le $14^{ème}$ championnat. Depuis c'est un besoin viscéral, la semaine passée, j'ai participé à la $24^{ème}$ épreuve, toujours avec le même bonheur.

Ici comme ailleurs, mon bonheur ce n'est pas de gagner, mais de relever un défi, aller chercher la limite de ses possibilités. Avec le temps, un autre objectif s'est imposé : comprendre les méandres du raisonnement. De la neuro-science. ***Les chemins du cerveau.***

Dans ce but, je m'écarte des idéaux de la FFJM (tout dans la tête, pas de calculette, pas d'ordinateur). Au contraire, pour chaque problème, j'aimerais mettre en parallèle la démarche du cerveau et une solution informatique. L'intuition magique, dont je me méfie, contre un bon programme.

Et je me permets de solliciter la vocation d'un psychologue aimant les mathématiques (si un tel personage existe ?) pour chercher à établir une corrélation entre le degré d'intelligence et le temps mis à trouver la réponse, plus la difficulté du problème (de 1 à 18), en gros une fonction qui agisse comme un révélateur:

```
int IQ = revelateurIQ(int temps, int probleme_difficulte) ;
```

où il faut encore se poser la question : la difficulté des problèmes est-elle linéaire de 1 à 18, ou parabolique, ou exponentielle, ou encore logarithmique ?

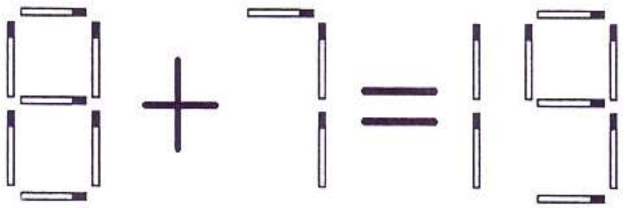
D'où le présent ouvrage.

Et en plus, espérer recevoir des commentaires, espérer avoir été utile ou intéressant.

Remerciements: Je remercie chaleureusement M. Daniel Collignon, son analyse de haut niveau mathématique, m'a beaucoup aidée.

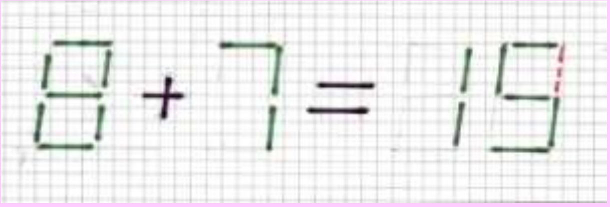
J'aimerais aussi remercier spécialement M. Christian Pralong de la FSJM pour ses encouragements et sa solution du problème 13.

1 – ADDITION EN ALLUMETTES (coefficient 1)



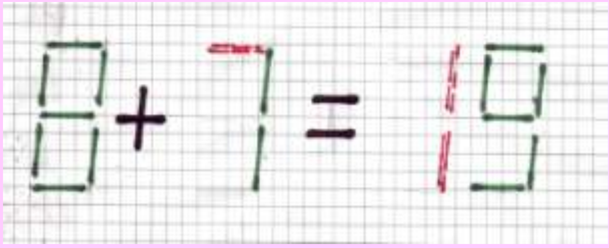
8 + 7 n'est pas égal à 19. **Enlevez deux allumettes pour obtenir une égalité juste.**

La solution saute aux yeux, on se précipite:



L’équation est juste, la réponse est fausse. C’est sans compter sans la malice de la FFJM, pourtant vous êtes averti. Ce n’est pas une allumette qu’il faut enlever , mais deux.

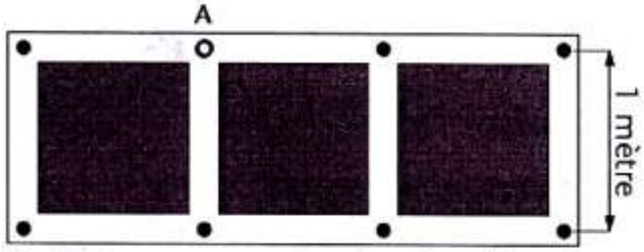
Alors un 2ème essai:



Pas de chances, vous avez enlevé trois allumettes.

Essayez encore une fois, le troisième essai sera le bon.

2 – LE HÉRISSON (coefficient 2)



Un hérisson se promène dans les allées de ce jardin en partant de A. Il peut passer plusieurs fois par le même carrefour, mais il ne doit pas emprunter plus d'une fois la même allée. Il ne revient pas obligatoirement au point A. **Quelle distance parcourra-t-il au maximum ?**

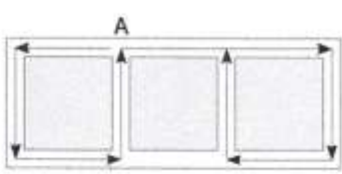
A vous de jouer au hérisson. Au maximum il y a 10 allées, mais essayez touts les cheminements, vous n'arriverez jamais à plus de 9.

Pourquoi ? Voir l'analyse de D. Collignon.

Mais si vous avez trouvé 9, passez au problème suivant.

Analyse de D. Collignon:

Le graphe connexe associé possède 4 sommets de degré 3. En supprimant une arête commune à 2 sommets impairs autres que A, le graphe résultant reste connexe et possède 2 sommets de degré 3 : il existe alors un chemin eulérien commençant par A et finissant par l'autre sommet de degré impair, composé de 9 arêtes. Le hérisson aura parcouru au maximum 9 mètres.



3 – PLIÉ-COUPÉ (coefficient 3)

Amélie prend une feuille de papier rectangulaire et elle la plie deux fois de suite. A l'aide d'une paire de ciseaux, elle coupe ensuite une seule fois le pliage obtenu en suivant une ligne droite.

Combien peut-elle obtenir de morceaux au maximum ?

Rien ne vaut la méthode expérimentale, du papier, une paire de ciseaux et essayer.

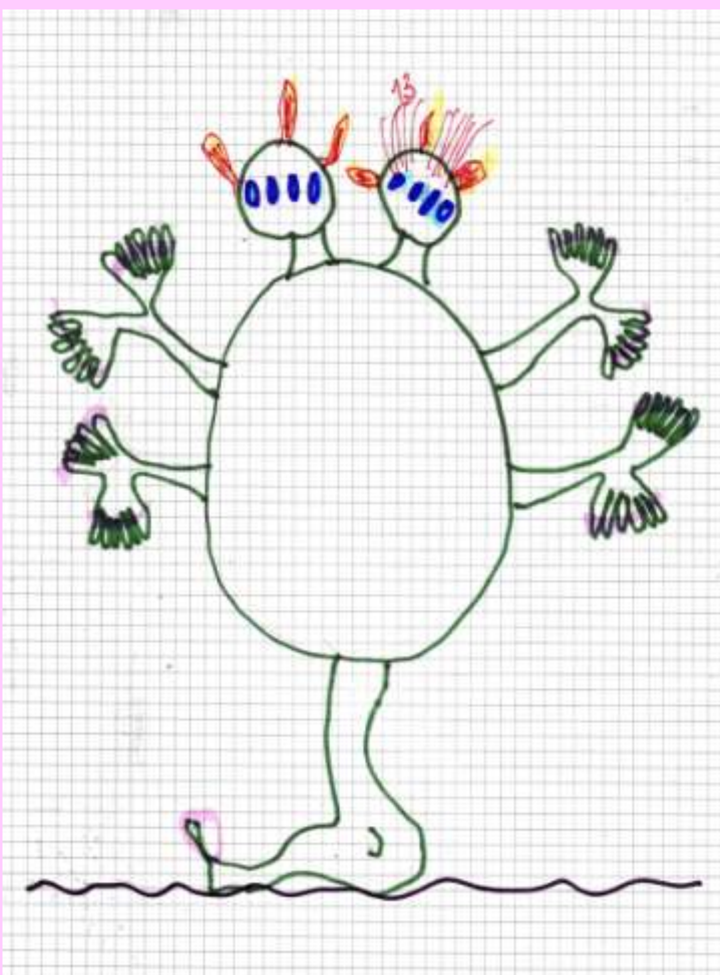
Compter les morceaux, on ne dépasse jamais 5.

4 – LE SATURNIEN (coefficient 4)

Un Saturnien possède 2 têtes, 4 yeux par tête et 3 oreilles par tête. Une tête est chauve, l'autre porte 13 cheveux. Le Saturnien possède également 4 bras, 2 mains par bras et 6 doigts par main. Enfin, il n'a qu'une seule jambe à un seul pied ayant un seul doigt.

En additionnant le nombre total d'yeux, d'oreilles, de cheveux et de doigts du Saturnien, quel nombre obtient-on ?

Un problème qui fera la joie des petits et des grands. Dessinez un joli Saturnien et comptez ce qu'il y a à compter (sans oublier le doigt de pied).



Mon joli Saturnien aux yeux bleus. Evidemment vous n'en rencontrez pas tous les jours dans la rue. Si vous voulez le point, comptez juste, c'est facile

5 – DE 1 À 8 (coefficient 5)

1				→ 15

Placez les chiffres 2 à 8 dans la grille de façon que :

- si on additionne les deux chiffres de n'importe quelle colonne, on obtient toujours le même résultat ;
- les quatre chiffres de la première ligne sont rangés du plus petit au plus grand et leur somme est égale à 15.

Un bon problème.

Additionnez les chiffres de 1 à 8, ça donne 36
Divisez par 4 (4 colonnes), soit 9 par colonne.

La première colonne vaut 1,8

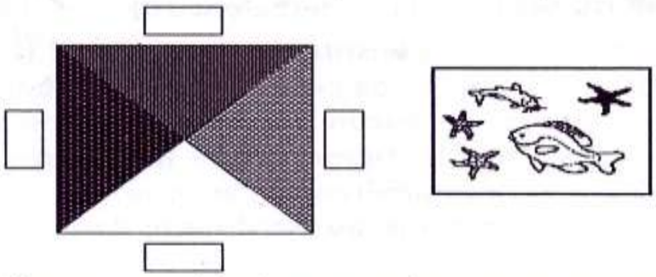
Ensuite les autres paires qui donnent 9 sont 2,7; 3,6 et 4,5

Chercher les chiffres qui horizontalement donnent 15 (1+14), 14 c'est 3+4+7

Mettre en place, du plus petit au plus grand.

Youpih.

6 – AU RESTAURANT (coefficient 6)



Alice et son frère Bertrand vont au restaurant avec leurs parents. Ils s'installent à une table carrée comportant une place sur chaque côté. Pour leur tranquillité, les parents décident qu'Alice et Bertrand seront assis l'un en face de l'autre, autrement dit surtout pas l'un à côté de l'autre. Alice ne doit pas avoir la place située en face de l'aquarium, ça lui donne le mal de mer.

Dans ces conditions, combien de placements différents sont-ils possibles autour de la table ?

De nouveau un bon problème, un point pas trop difficile à gagner.

Pour Alice, il y a 3 places possible (because le mal de mer).

Pour chaque position d'Alice, les parents peuvent se placer de 2 façons différentes.

Un raisonnement logique.

Alors la réponse ?

7 – KAAS - TÊTE (coefficient 7)

F.I. Kaas, joueur de l'équipe vainqueur du dernier championnat de football de son pays, a marqué 2 buts à chacun des matchs disputés par son équipe. Durant tout le championnat, 20 des buts qu'il a marqués l'ont été de la tête et cela correspond à la moitié des buts qu'il a marqués du pied. Il n'a marqué aucun but avec une autre partie de son corps.

Chaque équipe a joué deux fois contre chacune des autres. Combien d'équipes y a-t-il dans ce championnat ?

D’abord, combien de buts a-t-il marqués ?

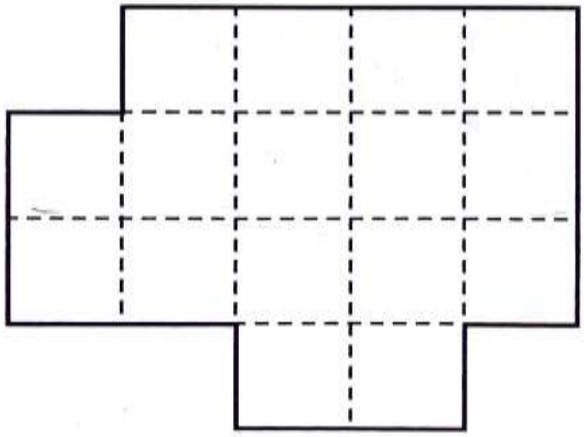
20 + 40 = 60 ; à 2 buts par match ça fait 30 matchs

Chaque équipe joue chaque fois 2 matchs contre l’équipe adverse.

L’équipe de Kaas a rencontré 15 équipes adverses, plus son équipe, ça fait 16.

D’accord ?

8 – DÉCOUPAGE (coefficient 8)



Découpez la figure ci-dessus selon les lignes du quadrillage en deux morceaux superposables, éventuellement en retournant un des morceaux.

Dans chaque épreuve FFJM, il y a un problème de forme, alors autant en prendre son parti et faire avec. C'est que l'homme (créature du bon Dieu) est bien plus fort que les produits de reconnaissance d'images des informaticiens. Comment fait l'homme ? Il y a tout un apprentissage. Nous reconnaissons un visage entre mille, mais débarquant à Pekin, toutes les chinoises, aussi charmantes soient-elles, nous semblent toutes identiques. De même pour une chinoise débarquant à Paris, elle ne voit pas les différences entre les bonshommes qu'elle croise dans la rue.

Reste l'intuition et quelques considérations:

- il y a 16 carrés, ce qui fait 8 carrés par morceau,
- chaque morceau doit contenir un bloc de 2 carrés et possiblement 2 blocs de 3 carrés,
- utiliser le retournement, c'est indiqué comme possibilité.

Je cite D. Collignon: ***''un découpage vient assez naturellement''*** **.**

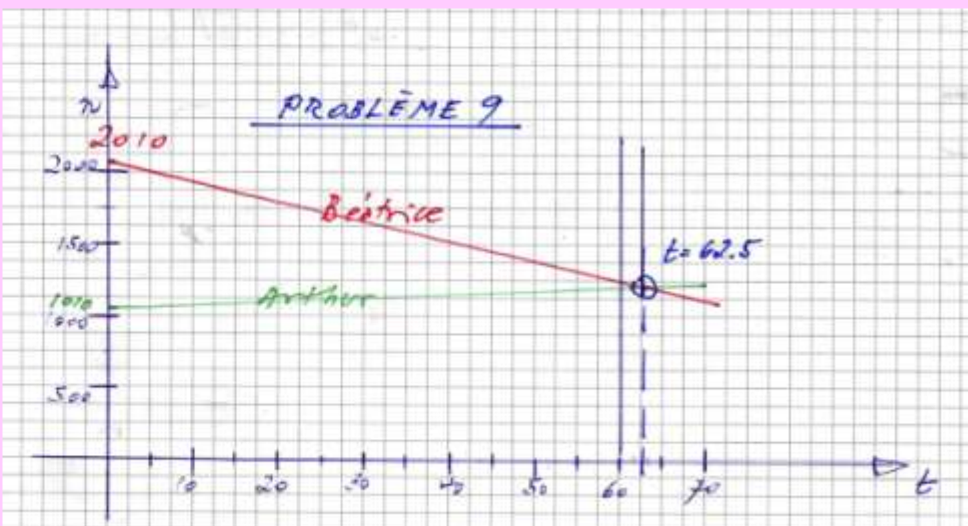
Evidemment, quand on a trouvé, ça paraît simple !

9 – COMPTES CROISÉS (coefficient 9)

Arthur et Béatrice commencent à compter à haute voix en même temps, à raison d'un nombre par seconde. Arthur part de 1010 en augmentant de 3 en 3 (1010, 1013, 1016,...) tandis que Béatrice part de 2010 en diminuant de 13 en 13 (2010, 1997, 1984,...). **Quel nombre prononcera Béatrice lorsque la différence entre les deux nombres (le plus grand moins le plus petit) qu'ils prononceront au même instant sera la plus petite possible ?**

Ce que j'aime appeler ***un problème ''honnête***'', franc, sans malice, sans raisonnements tortueux. Etre logique, persévérant précis, pas besoin d'être super-intelligent. Deux processus linéaires, un qui monte, un qui descend, ils commencent en même temps. Ils doivent bien se croiser une fois.

Le chemin est clair, on peut employer l'algèbre du Collège, écrire les équations des 2 droites, trouver leur point d'intersection..




```
Béatrice: y1 = 2010 – (13*t)
Arthur:   y2 = 1010 + (3*t)

Y2 = y1;  1010 = 16*t;  t= 62.5

// 62.5 c'est ici qu'intervient la malice de la FFJM, c'est
// toutes les secondes entières que Béatrice et Arthur
// parlent, donc soit

t = 62; t = 63;  // ce qui donne pour les nombres prononcés
                 // par Béatrice

2010 – (62*13) = 1204;   // soit
2010 – (63*13) = 1191;   // et la différence est 13, comme
                         // il se doit.
```

10 – L'AVENUE DE MATH CITY (coefficient 10)

La ville de Math City est constituée d'une seule (très longue) avenue. Les numéros de cette avenue possèdent au plus trois chiffres et aucun de ces numéros ne comporte plus d'une fois le même chiffre (par exemple 77 et 343 ne sont pas des numéros de l'avenue).

Combien y a-t-il d'habitations, au maximum, dans cette ville ?

Remarque : il y a exactement un numéro par habitation et un numéro ne commence jamais par un zéro

Ici aussi, le chemin est clair: il n'y a qu'à (niaka) écrire touts les nombres de 1 à 9?? Et biffer ceux qui ne conviennent pas. ''***Fleissarbeit***'' disent mes amis suisses-allemands, travail de bénédictins. Ça vaut la peine de réfléchir un peu pour faciliter le tri.

1ère centaine, de 1 à 99, on biffe 11, 22, 33, … 99, soit 9 nombres.

2ème centaine, de 100 à 199, on biffe 100, 101, 11?[10], 121, 122, 131, 133, 141, 144, … , 191, 199, soit 28 nombres

3ème centaine, de 200 à 299, on biffe 200, 202, 211, 213, 22?[10], 232, 233, …   aussi 28 nombres

Cette situation se répète pour les centaines suivantes (vérifiez !).

Finalement on a:

999 – 9 – (9*28) = 999 – 261 = ***738***

C'était donc faisable.

11 – LE COUP DE BERTIN (coefficient 11)

Bertin, concurrent FFJM, a participé à cette épreuve en catégorie CM. Il a obtenu un total de 13 points de coefficient.

Quels sont les problèmes que Bertin a résolus correctement ?

Rappels : en catégorie CM, les concurrents résolvent les 8 premiers problèmes. Chacun de ceux-ci est juste ou faux. Un problème juste rapporte un nombre de points de coefficient égal au numéro du problème. Un problème faux ne rapporte aucun point de coefficient.

Le coup de Bertin, disons plutôt le coup de Jarnac.

Problème no 11, en principe déjà assez difficile, mais il apparaît enfantin, faire une somme de 13 en utilisant une fois les chiffres de 1 à 8, il y a de nombreuses possibilités, par exemple 1+4+8; 3+4+6; 1+2+3+7, etc.

La feuille de réponse n'a des fenêtres que pour 2 réponses.

Complètement déstabilisé, on n'a pas le courage de répondre juste.

L'énoncé demande quels sont les problèmes que Bertin a résolus correctement, mais sur la feuille des réponses on demande le nombre de solutions.

Il faut donc être sûr d'avoir trouvé toutes les possibilités.

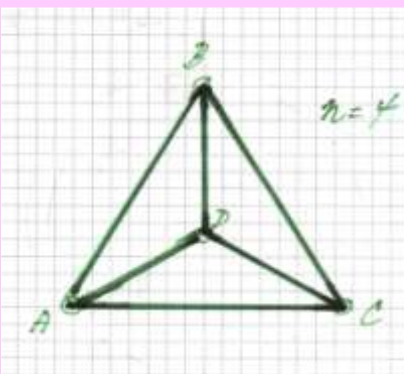
Les problèmes de la FFJM sont une école de vie: ***avoir le courage de ses opinions.***

12 – LES SIX OCELLES (coefficient 12)

On vient de découvrir une nouvelle espèce d'insecte jusqu'alors inconnue. Celui-ci possède six petits yeux appelés "ocelles", situés dans un même plan. Si on assimile ces ocelles à des points et qu'on considère tous les triangles isocèles (non aplatis) admettant trois des six points comme sommets, on obtient le nombre maximal de triangles isocèles constructibles à partir de six points.

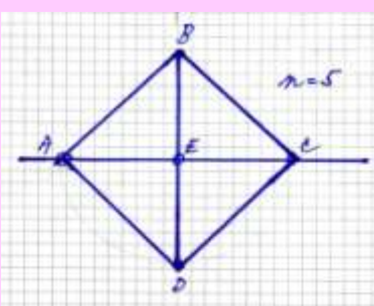
Combien de triangles isocèles les six ocelles permettent-ils d'obtenir ?

D. Collignon: commençons par 4 points, ensuite 5, on en déduit la logique pour 6 et plus.

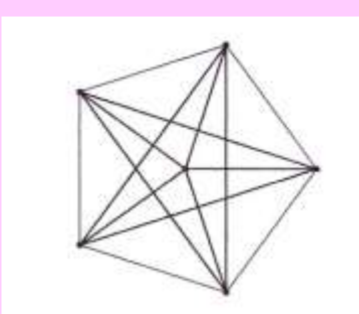



```
C(n;k) = n!/(k! * (n-k)!)

C(4;3) = 4!/(3! * 1!) = 4
```




```
C(5;3) = 5!/(3! * 2!) = 10
/* or on ne voit que 8 triangles,
   AEC et BED sont à considérer comme
   2 triangles isocèles extra-plats */
```



n = 6

C(6;3) = 6!/(3! * 3!) = **20**

13 – LA SOMME DE L'ANNÉE (coefficient 13)

On effectue la somme 1/10 + 2/100 + 3/1000 + 4/10 000 + ..., autrement dit 0,1 + 0,02 + 0,003 + 0,0004 + ...et ainsi de suite à l'infini, et on écrit cette somme dans le système décimal.

Dans cette somme, quel est le 2010ème chiffre après la virgule ?

J'ai atteint mon niveau d'incapacité.
Alors je vous donne le corrigé de D. Collignon:

13 La somme de l'année

Nous avons $\sum_{i\geqslant 1} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ « dérivé » de $\sum_{i\geqslant 0} x^i = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$. Ainsi $\sum_{i\geqslant 1} \frac{i}{10^i} = \frac{10}{81} = 0,\overline{123456790}$ (période 9) et, puisque $2010 \equiv 3 \pmod 9$, le 2010ème chiffre après la virgule est le même que le 3ème chiffre, c'est-à-dire 3.

Avec le commentaire suivant:

formellement il faut au moins connaître cette relation
1/(1-x) = 1+x+x^2+...+x^k+...
en dérivant on obtient
1/(1-x)^2 = 1+2x+3x^2+...+kx^(k-1)+...
en multipliant par x on obtient
x/(1-x)^2 = x+2x^2+3x^3+...+kx^k+...

Le "dérivé" est entre guillemets car je joue sur les mots (dérivé a un sens mathématique, et là à un facteur près c'est bien la dérivée, d'où le dérivé courant, sous-entendant expression dérivée de celle-ci plus connue)

Maintenant faites x=1/10 dans la dernière expression et vous aurez compris la première partie.

Pour la deuxième partie, en remarquant que la fraction 10/81 est égale à 0,123456790123456790... qui se répète (le 10è chiffre est 1 identique au 1er, ...) , il n'est pas difficile de trouver le 2010ème chiffre sachant que la période est de longueur 9 ; comme 2010=223*9+3, cela signifie que le 2010ème chiffre est le même que le 3ème (reste dans la division euclidienne), qui correspond bien au chiffre 3.

Quelqu'un aurait-il un chemin moins ''abstrait'' ?
Voici la solution proposée par M. Christian Pralong

Pour le problème n° 13,
je vous propose une démarche plus artisanale que celle de Monsieur Collignon :

Dans mon raisonnement, je suis parti de l'idée que, pour la 2010ème décimale seuls les nombres autour de 2010 interviennent et j'ai juste écrit le voisinage en commençant prudemment par 2000 dont le dernier zéro appartient à la somme à faire pour la 2000ème décimale du résultat ;

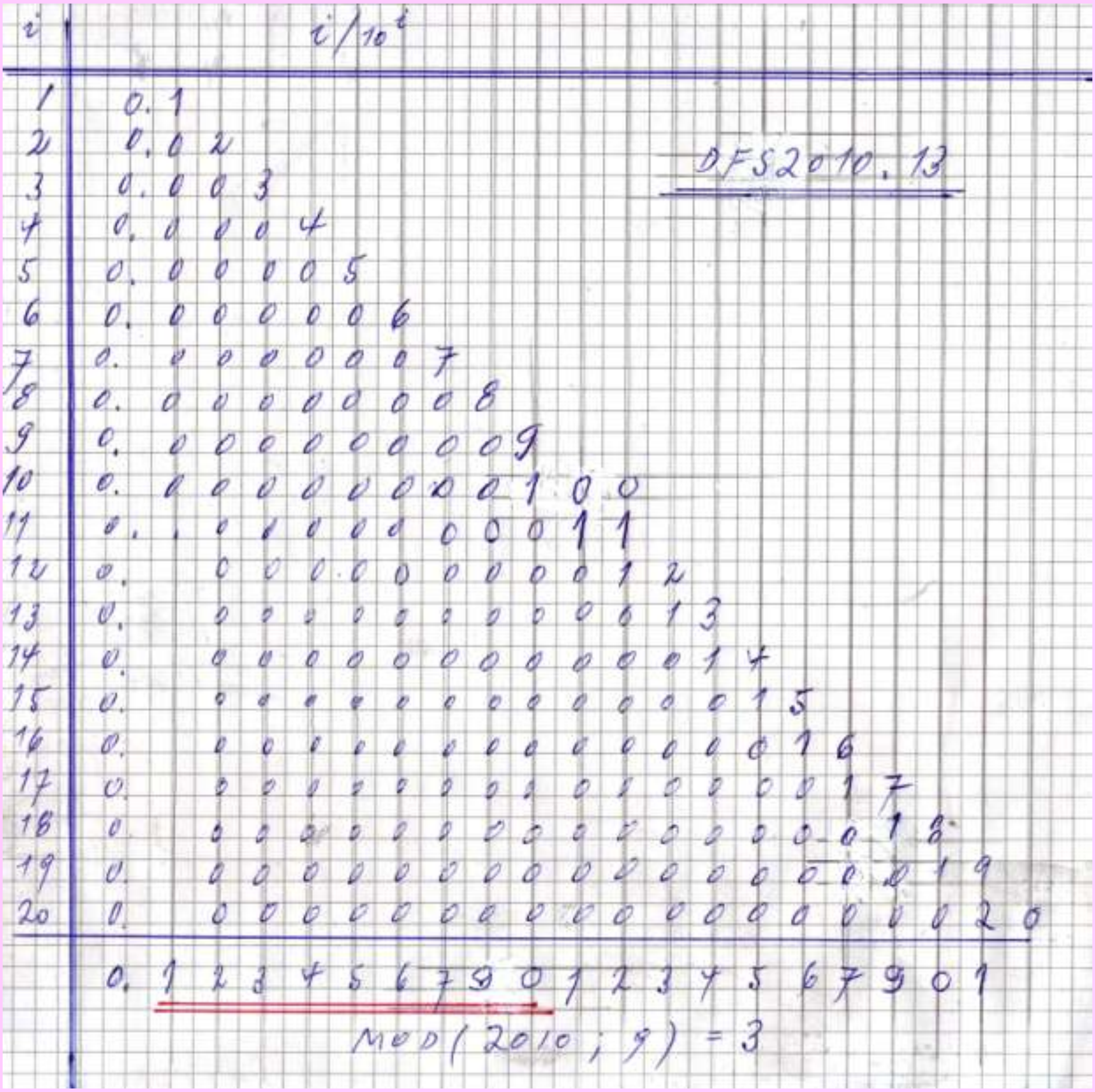
```
Décimales (à lire verticalement) :
1-1-1-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2
9-9-9-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0
9-9-9-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-1-1-1-1-1-1-1
7-8-9-0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-0-1-2-3-4-5-6
Nombres de la suite intéressants
2-0-0-0
--2-0-0-1
----2-0-0-2
------2-0-0-3
--------2-0-0-4
----------2-0-0-5
------------2-0-0-6
--------------2-0-0-7
----------------2-0-0-8
------------------2-0-0-9
--------------------2-0-1-0
----------------------2-0-1-1
------------------------2-0-1-2
--------------------------2-0-1-3
----------------------------2-0-1-4

Total : .................3........
```

M. Collignon fait le commentaire suivant:

C'est en effet plus simple et plus accessible pour les plus jeunes, mais il faut bien se convaincre qu'il n'y a pas de retenue venant contrarier cette simplicité (les chiffres en jeu étant petits on peut en être sûr).
L'avantage de l'autre méthode c'est qu'elle fournit tous les chiffres : imaginez qu'on vous demande la valeur du résultat, ou plusieurs décimales dispersées...

A relire l’énoncé ainsi que les 2 méthodes proposées, on peut faire une sorte de synthèse des deux façons de faire: la somme est probablement un nombre rationnel et a donc une périodicité, cherchons cette périodicité en écrivant les 20 premiers termes et en faisant la somme:



La période est de 9 chiffres et vaut 123456790

```
3 = Mod(2010,9)
```

`// la 3`$^{\text{ème}}$ `position de la période est` ***3*** `également`

14 – ALBERT LE VERT (coefficient 14)

Une agent secret soviétique vivant à New York aurait eu une relation amoureuse avec Einstein dans les années 1945-1946. Né le 14 mars 1879, le père de la théorie de la relativité, un roc (mais pas de marbre !), était alors enseignant à Princeton et lui aurait écrit 9 lettres.

La première est datée du 1.9.45, la dernière d'avril 46 et elles ont été écrites à intervalles parfaitement réguliers.

Quel jour du mois d'octobre 1945 Einstein lui a-t-il écrit?

‘’*la dernière d’avril 46”,* on ne dit pas quand en avril

Entre le 1^{er} sept et le 1^{er} avril, il y a 211 jours
entre le 1^{er} septembre et le 30 avril, il y a 241 jours.

Dans ces limites ont peut placer des périodes [8] égales à:
27 (8*27=216), 28 (8*28=224), 29 (29*8=232), 30 (30*8=240)

Si on part du 01.09 avec une période de 27 jours, on trouve une $3^{ème}$ lettre le 25 octobre.
Si on part du 01.09 avec une période de 28 jours, on trouve une 3ème lettre le 27 octobre.
Si on part du 01.09 avec une période de 29 jours, on trouve une 3ème lettre le 29 octobre.
Si on part du 01.09 avec une période de 30 jours, on trouve une 2ème lettre le 1^{er} octobre et une troisième lettre le 31.

Et pour la morale des hypocrites, j’aimerais citer le poète persan:

‘’Quel homme n’a jamais transgressé Ta loi, dis ?
Une vie sans péché, quel goût a-t-elle, dis ?
Si Tu punis le mal que j’ai fait, par le mal,
Quelle différence entre Toi et moi, dis ? ‘’

Omar Khayâm

15 – LES NOMBRES DE L'ANNÉE (coefficient 15)

Les deux nombres de l'année sont deux nombres entiers positifs ♦ et ♣ tels que :

$$2010 = \blacklozenge + \frac{(\blacklozenge + \clubsuit - 1)(\blacklozenge + \clubsuit - 2)}{2}$$

Quelle est la valeur de ♦ ?

Il y a deux façons de faire: celle des gens super-intelligents, les HC (Haute Compétence), voir plus bas la version de D. Collignon.

L'autre façon de faire est celle des gens moyennement doués, les GP, le grand public dont le niveau mathématique s'arrête à l'équation du 2ème degré (comme moi).

Voici ma solution, plus laborieuse, à vous de comparer.

```
x = trefle; y = carreau;

2010 = y + (y+x-1)*(y+x-2)/2;  // une équation pour 2 inconnues

4020 = 2*y + (y^2 + x^2 + (2*x*y) - 3*y - 3*x + 2);

// mettre sous la forme y = f(x)

y^2 + y*(2*x - 1) + (x^2 - 3*x + 2)- 4020 = 0

/* eq. du 2ème degré, de la forme  a*x^2 + b*x + c = 0     */

/* comme x et y doivent être des entiers positifs, étudions
d'abord le discriminant b^2 - 4*a*c, soit:
*/

(2*x-1)^2 - 4*(x^2 - 3*x - 4018);

8*x + 16073

/* cherchons une valeur de x qui donne une valeur entière de la
racine du discriminant, x=7                                  */

y = (-13 +- sqrt(16129))/2 = (-13 +- 127)/2

/* prenons la valeur positive de la racine                   */

 y = (-13 + 127)/2 = 57
```

La solution de D. Collignon :

15 Les nombres de l'année

Posons $n = c + t \geqslant 0$, de sorte que $(n-1)(n-2) = 4020 - 2c \leqslant 4020$. Or, $63 \times 62 = 3906$ et $64 \times 63 = 4032$, d'où $c \leqslant n \leqslant 64$. Alors $(n-1)(n-2) = 4020 - 2c \geqslant 3892$. Puisque $62 \times 61 = 3782$, alors $n \geqslant 64$. Donc $n = 64$ et $4020 - 2c = 3906$, d'où $c = 57$.
Remarque : pour trouver la valeur 63 sans trop tâtonner, il suffit d'approximer $n^2 \approx (n-1)(n-2) \leqslant 4020 \approx 4000$, d'où $n \approx 20\sqrt{10}$.

4

16 – SOMME DE CARRES (coefficient 16)

Choisissez un nombre de départ ayant au plus 3 chiffres et écrivez-le. Additionnez les carrés de ses chiffres : vous obtiendrez un deuxième nombre que vous écrirez.
Recommencez l'opération consistant à additionner les carrés des chiffres du dernier nombre écrit et écrivez le résultat tant que celui-ci n'est pas égal à un nombre déjà écrit.
Exemple : 409 ; 97 ; 130 ; 10 ; 1.
Quel nombre de départ donnera la liste comportant le plus de nombres possible ?

Un problème difficile, il y a 999 valeurs de départ possibles. Je suis incapable de trouver un filtre ou des raccourcis. Mon niveau d'incapacité est largement atteint et dépassé, alors je vous donne la solution de D. Collignon.

16 Somme de carrés

Notons $f\left(\overline{cdu}\right) = c^2 + d^2 + u^2$ pour $0 \leqslant c, d, u \leqslant 9$.
Si $n \leqslant 999$, alors $f(n) \leqslant f(999) = 243$.
Si $200 \leqslant f(n) \leqslant 243$, alors $f^2(n) = f \circ f(n) \leqslant f(239) = 94$.
Si $100 \leqslant f(n) \leqslant 158$, alors $f^2(n) \leqslant f(158) = 90$.
Restent quelques cas à expliciter ; pour en réduire leur nombre, remarquons que nous pouvons nous limiter aux $\overline{cdu}$ tels que $0 \leqslant c \leqslant d \leqslant u \leqslant 9$.

$f(n)$	159	166	167	168	169	177	178	179	188	189	199
$f^2(n)$	107	73	86	101	118	99	114	131	129	146	163
$f^3(n)$	50			2	66		18	11	86	53	46

Ainsi nous nous ramenons à un nombre inférieur à 99 en au plus 3 opérations.
Calculons $f\left(\overline{du}\right) = d^2 + u^2$ pour $0 \leqslant d \leqslant u \leqslant 9$ dans un tableau à double entrées.

$d \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1		2	5	10	17	26	37	50	65	82
2			8	13	20	29	40	53	68	85
3				18	25	34	45	58	73	90
4					32	41	52	65	80	97
5						50	61	74	89	106
6							72	85	100	117
7								98	113	130
8									128	145
9										162

Cela permet de dresser le graphe des situations (non représenté ici).
Voici la chaîne la plus longue (17 termes) 6, 36, 45, 41, 17, 50, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58.
Cherchons $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ ou 60 avec $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 9$. D'où $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
Cherchons à présent $x^2 + y^2 + z^2 = 112$ ou 121 ou 211 avec $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 9$. D'où $(x, y, z) = (2, 6, 9)$ ou $(6, 6, 7)$ ou $(9, 9, 7)$ et l'on ne peut aller plus loin (borne 243).
Il faut également étudier $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ou 63 avec $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 9$. Exceptée $(x, y, z) = (0, 0, 6)$ déjà acquise, il reste $(x, y, z) = (2, 4, 4)$ et l'on ne peut aller plus loin (borne 243).
La deuxième chaîne la plus longue (16 termes) 99, 162, 41, 17, 50, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58 ne permet de faire mieux puisque $x^2 + y^2 + z^2 = 99$ admet pour unique solution $(x, y, z) = (3, 3, 9)$ et l'on ne peut aller plus loin (borne 243).
Les autres chaînes ne sont pas assez longues pour espérer faire mieux.
En tenant compte des permutations, il y a donc 12 solutions : 269, 296, 629, 667, 676, 692, 766, 799, 926, 962, 979, 997.

Nous sommes tous intelligents, certains sont plus intelligents que d'autres.
C'est comme ça. A défaut d'aboutir par la raison, utilisons la force:

départ	cent.	diz-unite	diz	unit	cent-e2	diz-e2	unit-2	n2:somme
n1	c=ent(n1/100)	n1-c*100	ent(du/10)	mod(du;10)	c*c	d*d	u*u	des carrés
269	2	69	6	9	4	36	81	121
296	2	96	9	6	4	81	36	121
629	6	29	2	9	36	4	81	121
121	1	21	2	1	1	4	1	6
6	0	6	0	6	0	0	36	36
36	0	36	3	6	0	9	36	45
45	0	45	4	5	0	16	25	41
41	0	41	4	1	0	16	1	17
17	0	17	1	7	0	1	49	50
50	0	50	5	0	0	25	0	25
25	0	25	2	5	0	4	25	29
29	0	29	2	9	0	4	81	85
85	0	85	8	5	0	64	25	89
89	0	89	8	9	0	64	81	145
145	1	45	4	5	1	16	25	42
42	0	42	4	2	0	16	4	20
20	0	20	2	0	0	4	0	4
4	0	4	0	4	0	0	16	16
16	0	16	1	6	0	1	36	37
37	0	37	3	7	0	9	49	58
58	0	58	5	8	0	25	64	89

FFJM – DEMI-FINALES SUISSES - 13 mars 2010 – Réponses

1 – ADDITION EN ALLUMETTES

2 – LE HÉRISSON — **9** mètres

3 – PLIÉ-COUPÉ — **5** morceaux

4 – LE SATURNIEN — **76**

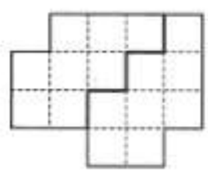
5 – DE 1 À 8

1	3	4	7
8	6	5	2

6 – AU RESTAURANT — **6** placements possibles

7 – KAAS - TÊTE — **16** équipes

8 – DÉCOUPAGE



9 – COMPTES CROISÉS — **2** solutions : **1191** et **1204**

10 – L'AVENUE DE MATH CITY — **738** habitations

11 – LE COUP DE BERTIN — **11** solutions : **(5+8, 6+7, 1+4+8, 1+5+7, 2+3+8, 2+4+7, 2+5+6, 3+4+6, 1+2+3+7, 1+2+4+6, 1+3+4+5)**

12 – LES SIX OCELLES — **20** triangles

13 – LA SOMME DE L'ANNÉE — **3**

14 – ALBERT LE VERT — **5** solutions : **1, 25, 27, 29, 31**

15 – LES NOMBRES DE L'ANNÉE — **1** solution : **57**

16 – SOMME DE CARRÉS — **12** solutions : **269, 296, 629, 692, 926, 962, 667, 676, 766, 799, 979, 997**

17 – LE PARC ANIMALIER — **41'791'750**

18 – L'HEPTAGONE — **495** mm $\left(70\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$