LES CHEMINS DU CERVEAU

Volume 5, janvier 2011

FFJM qualifications
pour le 25ème championnat

Claude Villars

Corrigé et complété
Daniel Collignon

Version du 27.02.2011

Prologue

La FFJM, Fédération Française des Jeux Mathématiques, que son nom soit loué, organise chaque année depuis 1987 un ‘’Championnat international des Jeux mathématiques et logiques’’. En 2011, elle en est à sa 25ème édition.

Depuis l’an 2000, je participe régulièrement à cette compétition et aujourd’hui, à 85 ans, je dois bien en être le doyen.

Depuis 2009 je me suis intéressé à cerner les démarches qui permettent d’obtenir la solution. Plus que la solution elle-même, comment le cerveau travaille pour y arriver, pour mon propre bénéfice, mais aussi celui des mes petits-enfants et des enseignants qui aimeraient travailler les problèmes de la FFJM avec une classe. En utilisant les problèmes de la FFJM, faire un laboratoire de pédagogie mathématique. De même que l’on s’entraîne pour une discipline sportive, on pourra utiliser ces solutions pour acquérir une plus grande expertise en logique mathématique.

Chaque année, il y a 5 séries de 18 problèmes: les qualifications, les demi-finales régionales, les finales régionales et la grande finale internationale (2 séries). En principe il peut donc exister 5 cahiers des ‘’Chemins du Cerveau’’ par an. Nous en sommes au 5ème cahier, mais nous n’avons pas analysé toutes les épreuves.

Il ne faut pas seulement dire ‘*’C’est comme ça*’’ (la solution des problèmes), mais il faut essayer de répondre à la question ‘*’Pourquoi c’est comme ça*’’. D’où le présent ouvrage. Et par là, peut-être, comprendre un tout petit peu mieux le fonctionnement de la machine (binaire, digitale ?) que nous avons dans le crâne.

J’aimerais souligner la contribution indispensable et inestimable de Daniel Collignon. Sans lui cet ouvrage n’existerait pas ou serait terriblement incomplet. Il a corrigé mes solutions pour les problèmes 1 à 14, il nous présente ses solutions pour les problèmes difficiles. Le lecteur pourra comparer les deux approches:

• celle de D. Collignon qui est celle d’un mathématicien, il dispose de toutes les ressources des mathématiques modernes,

• mon approche ‘’ terre à terre’’, qui est celle d’un grand-père à la retraite, qui a fait des études d’ingénieur et qui prend plaisir à motiver ses petits-enfants à aller explorer les mathématiques. Je me limiterai aux problèmes 1 à 13, laissant les derniers problèmes supérieurs à des meilleurs que moi (facile), par exemple Daniel Collignon.

Je remercie aussi toutes les autres personnes qui m’aident, celles qui se manifestent sur Internet. Ça permet des échanges fructueux.

Apprendre, comprendre, créer.

cp.villars@tele2.ch

Je serai toujours heureux d’avoir vos commentaires

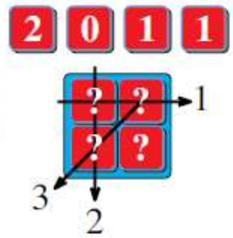
D:\Présentations\FFJM\Qual2011

1 - LES QUATRE JETONS

Mathias dispose de quatre jetons portant les chiffres 2, 0, 1 et 1.

Il les dispose dans une boîte carrée de façon qu'en additionnant les valeurs des jetons d'une ligne, d'une colonne et d'une diagonale, on trouve 1, 2 et 3 comme l'indique le dessin.

Retrouver la place de chaque jeton.



Le premier problème est toujours le plus facile.

On ''voit'' qu'il faut utiliser le 2 et le 1 pour satisfaire la diagonale et qu'il faut placer le 2 en bas pour satisfaire la 1ère colonne. Restent deux places pour les zéros.

Donc la solution:

0 1

2 1

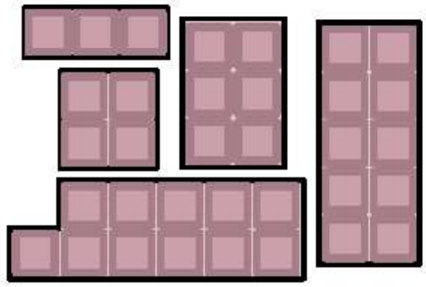
Remarques:

On peut se poser les questions:

- *dans une population d'élèves de 8 à 10 ans, quel est le pourcentage de réussites ? (suivant le groupe social, les écoles primaires, etcetera, …)*
- *dans une population d'élèves de 14 à 16, quel est le temps moyen nécessaire pour trouver la solution ?*

2 - CHOCOLAT

Mathilde a invité Mathias et Matthieu à goûter.
Elle dispose de cinq morceaux de chocolat de 3 carrés, 4 carrés, 6 carrés, 10 carrés et 11 carrés.
Sans casser aucun morceau, elle donne le même nombre de carrés à Mathias et à Matthieu, et elle mange les carrés restants.
Combien Mathilde a-t-elle mangé de carrés de chocolat ?

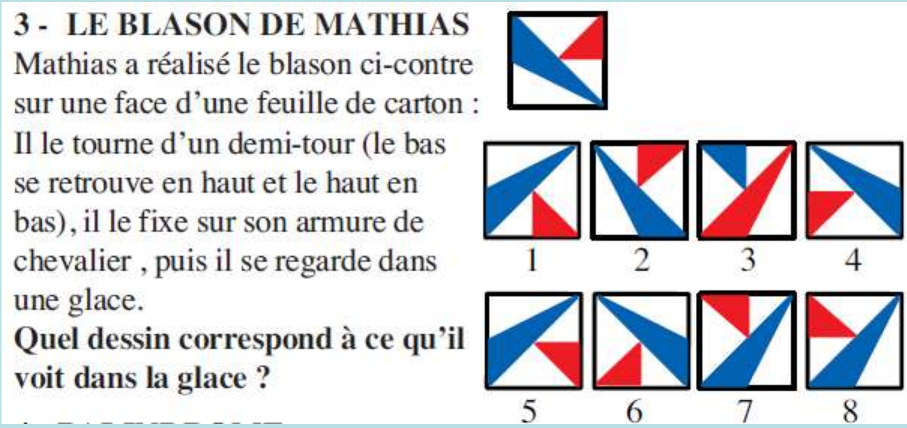


Il faut faire deux sommes égales en utilisant

3 4 6 10 et 11,
par exemple (3+11) et (4+10), restent ***6 carrés*** pour Mathilde.

On ne le demande pas, mais il existe une $2^{ème}$ solution:

(4+6) et 10, restent ***14 carrés*** pour Mathilde, solution qu’elle a sans doutes préférée.



3 - LE BLASON DE MATHIAS

Mathias a réalisé le blason ci-contre sur une face d'une feuille de carton : Il le tourne d'un demi-tour (le bas se retrouve en haut et le haut en bas), il le fixe sur son armure de chevalier , puis il se regarde dans une glace.

Quel dessin correspond à ce qu'il voit dans la glace ?

Bonne occasion pour revoir les lois de l'optique, si possible en allant chercher la miroir de maman.

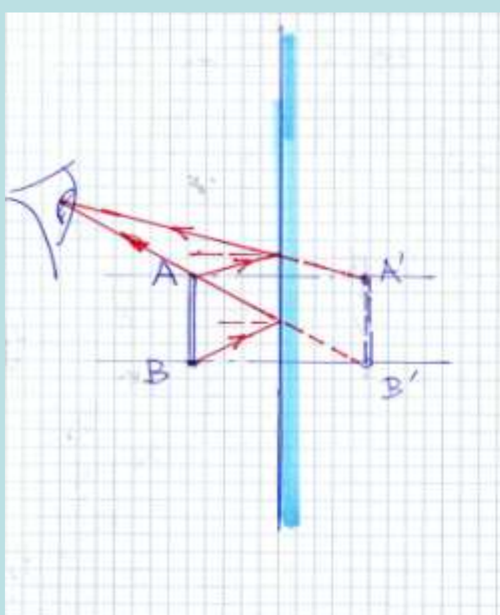
L'image virtuelle que l'œil perçoit est une symétrie par rapport au plan du miroir.

On commence par tourner la feuille de bas en haut, le triangle doit venir en bas, restent donc comme cas possibles 1, 4, 5 ou 6.

La flèche doit être à droite, restent 1 ou 5.

Regarder la position du triangle, seul ***5*** fait l'affaire.

Et si vous n'êtes pas convaincu, prenez la feuille, retournez la, placez la sur votre ventre et aller devant une glace.



La solution D. Collignon

3 Le blason de Mathias

En prenant le centre du carré comme origine du plan complexe O, le demi-tour (ou symétrie centrale) autour de O transforme z en $-z$ et la symétrie axiale (ou réflexion) selon l'axe des nombres imaginaires transforme z en $-\overline{z}$. La composée des 2 transforme z en $\overline{z}$, ce qui est équivalent à une symétrie axiale selon l'axe des nombres réels.
Le bon dessin est alors le numéro 5.

''Jedes Tierchen hat sein Vergnügchen''

En français ''Chacun trouve son bonheur à sa manière''.

Et on trouve le même résultat, pourtant ce n'est plus du niveau de l'école primaire.

4 - PALINDROME

On écrit les dates sous la forme « jjmmaaaa » (par exemple 01092010 pour le 1er septembre 2010). Le 1er février 2010 s'est écrit 01022010. Un tel nombre, qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, est un nombre palindrome.

Quelle sera la prochaine date palindrome ?

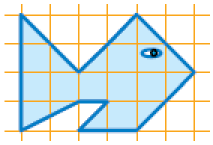
Toujours les palindromes, pâles et drôles, ce doivent être des nombres doués d'un pouvoir méta-physiques (bons pour éliminer les verrues ou gagner à la loterie, …)

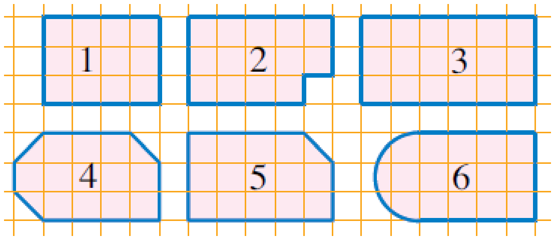
Remarque la symétrie 0102 ¦ 2010

Il ne peut plus y avoir de palindromes en 2010

En 2011? 1102 ¦ 2011, fait l'affaire, soit le ***11 février 2011.***

5 - LE POISSON

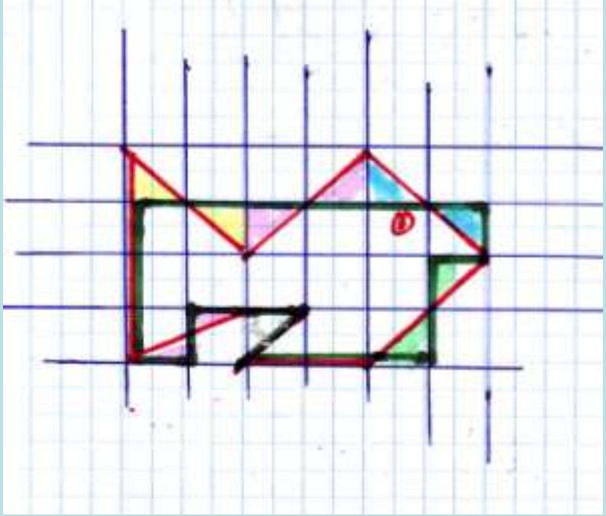




L'une des six formes ci-dessus occupe une surface équivalente à celle du poisson. **Laquelle ?**

Il faut calculer la surface du poisson. Pour cela, effectuons un remaniement parcellaire, le poisson rouge devient le poisson vert.

Sa surface est de 14 ½ carrés, ce qui correspond à la ***figure 5.***



La solution D. Collignon

5 Le poisson

Commençons par déterminer l'aire du poisson. Une première façon de s'y prendre est de considérer un rectangle 4×6 auquel on enlève quatre demi-carrés de côté $1, 2, 2$ et $2\sqrt{2}$, et un demi-rectangle 1×2, d'où une aire de $24 - \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2\right) = 14,5$.
Une autre façon est d'utiliser le théorème de Pick, en comptant 7 points intérieurs et 17 points sur la frontière, nous retrouvons une aire de $7 + \frac{17}{2} - 1 = 14,5$.
Seule la forme numéro 5 possède une aire équivalente.

Forme	1	2	3	4	5	6
Aire	12	14	18	13,5	14,5	$12 + \frac{9}{8}\pi$

Les approches ''Robinson'' et ''Mathématiques'' se rejoignent

6 - L'ÂGE DE MATHIAS

Mathias a deux soeurs plus jeunes que lui. Le produit des âges des trois enfants est égal à 396 et la somme de ces âges est égale à 23.

Quel est l'âge de Mathias ?

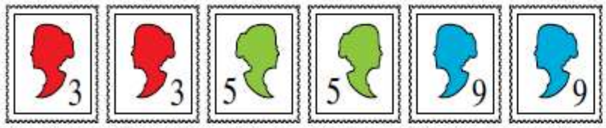
Le tir d'artillerie: un fois trop court, une fois trop loin, la troisième salve est au but.

Aidons- nous d'Excel.

sœur-1	sœur-2	(23-âgeDesSoeurs)	Produit des âges
1	1	21	21
1	2	20	40
2	2	19	76
3	3	17	153
3	7	13	273
4	4	15	240
5	5	13	325
5	8	10	400
5	7	11	385
6	***6***	***11***	***396***

Mathias a 11 ans.

7 - LES TIMBRES



Mathilde dispose des six timbres représentés ci-contre (3 ludos, 3 ludos, 5 ludos, 5 ludos, 9 ludos et 9 ludos).

En utilisant au maximum quatre de ces timbres, elle peut réaliser toutes les sommes de 8 ludos à 26 ludos sauf une. Laquelle ?

Ce n'est pas trop laborieux d'écrire les combinaisons de 8 à 26

8	3	5			8
9	9				9
10	5	5			10
11	3	3	5		11
12	3	9			12
13	3	5	5		13
14	5	9			14
15	3	3	9		15
16	5	9			14
17	3	5	9		17
18	9	9			18
19	5	5	9		19
20	3	3	5	9	20
21	3	9	9		21
22	3	5	5	9	22
23	5	9	9		23
24	3	3	9	9	24
25 ?	**?**	**?**	**?**		**#VALEUR!**
26	3	5	9	9	26

La réponse est 25

Remarque:

Après ça, vous pouvez vous faire engager à la Poste, dans presque tous les pays du monde, la série des timbres (comme la monnaie et les billets de banque) est de

1 2 5 10 20 50 100 …

Avec ces valeurs aucune combinaison n'est impossible et on n'emploie jamais plus de 3 unités, bien qu'il n'existe pas de billets au-delà de 10'000 pesetas, mais ça suffit pour des gens comme vous et moi. De toutes façons, on fait les paiements par internet ou par cartes de crédit. La monnaie devient une espèce en voie de disparition.

8 - AU MUSÉE

Le père de Garance est gardien au musée de Maths-ville. En 2010, il aura travaillé uniquement les jours dont le numéro (dans le mois) est pair, ainsi que tous les mercredis et tous les samedis.

Combien de jours successifs aura-t-il travaillé, au maximum ?

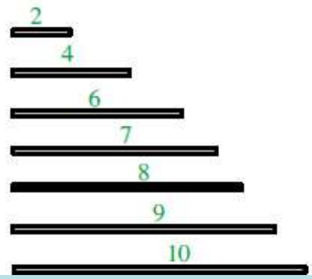
Le problème me semble trop simple, il se peut que je me trompe.

Au maximum il peut travailler ***3 jours de suite***, un mercredi ou un samedi impair entouré de 2 jours pairs.

9 - LES SEPT BAGUETTES

On utilise ces sept baguettes (dont les longueurs en centimètres sont indiquées sur le dessin) en les disposant bout à bout pour dessiner un rectangle.

Quelle est la longueur de ce rectangle ?

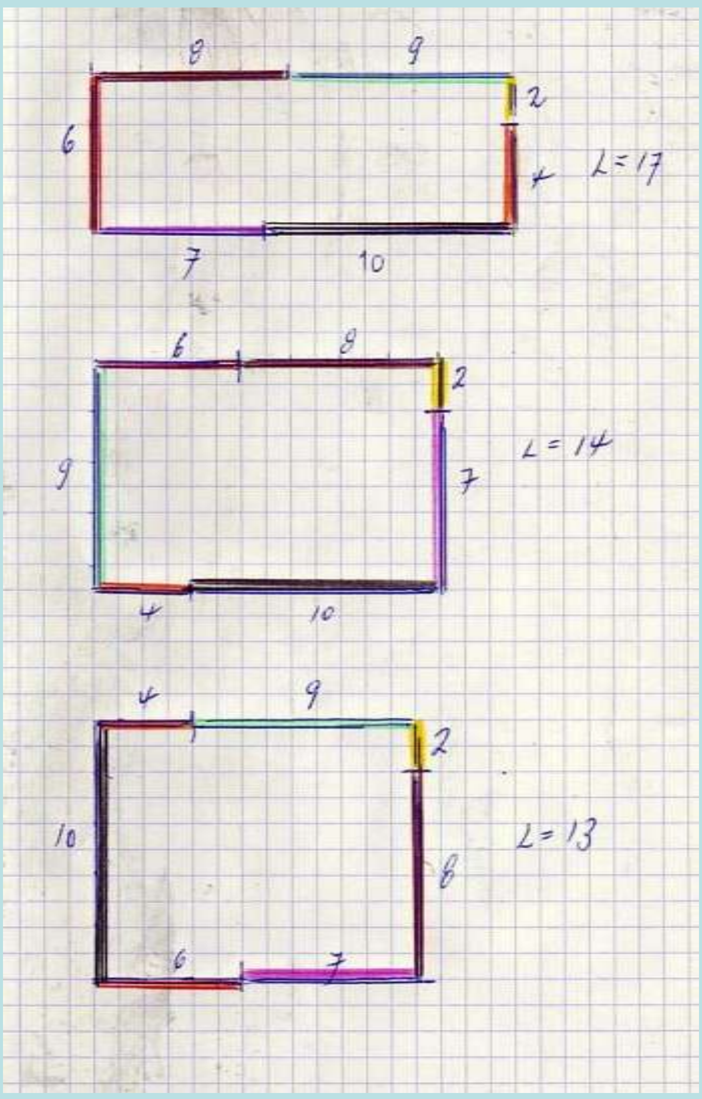


Avec les 7 nombres 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, trouver des valeurs qui 2 à 2 sont égales, de quoi former le rectangle:

6 / 2, 4 8, 9 / 7, 10 ***longueur 17***

9 / 2, 7 6, 8 / 4, 10 ***longueur 14***

10 / 8, 2 4, 9 / 6, 7 ***longueur 13***



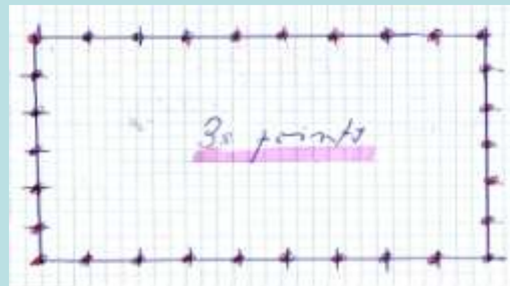
10 - LES TRENTE SEGMENTS

Mathilde trace trente segments distincts sur une feuille de papier et on compte le nombre de points qui sont l'extrémité d'au moins un segment.

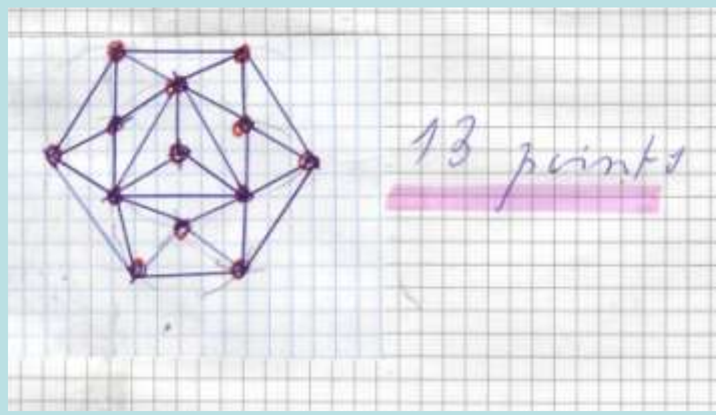
Combien de points Mathilde trouvera-t-elle, au minimum ?

Finie la *dolce vita*. Ça devient sérieux. A défaut d'une bonne méthode, allons-y pas à pas:

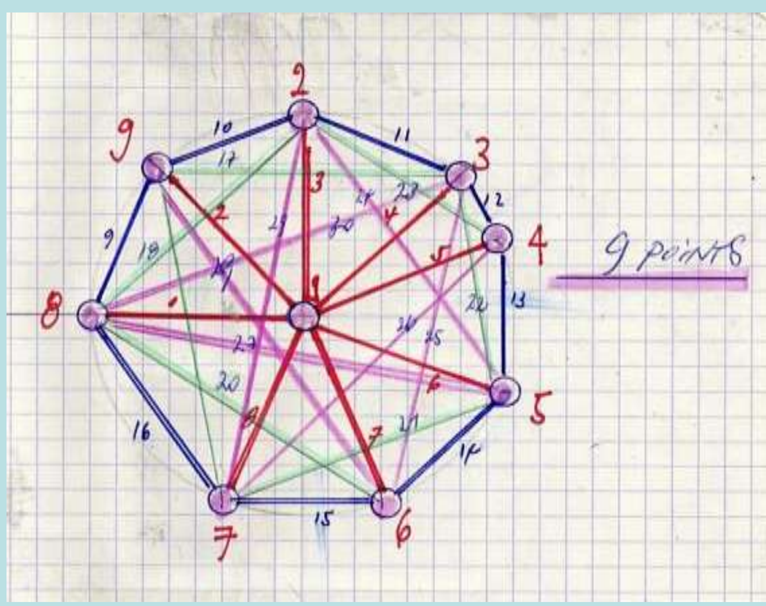
1. Faire une boucle avec les 30 segments:



2. Faire un filet à mailles triangulaires



3. A partir de chaque nœud, faire partir le maximum de segments



La solution D.- Collignon

10 Les trente segments

Avec n points, il est possible de constituer au plus $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ segments. Ainsi il est nécessaire que $C_n^2 \geqslant 30$, et comme $C_8^2 = 28$ et $C_9^2 = 36$, d'où $n \geqslant 9$. Réciproquement, en supprimant 6 segments du graphe complet K_9, nous en déduisons que 9 est le minimum cherché.

Commentaire:

L'astuce est de prendre le problème à rebours, commencer par les points et voir combien de segments on peut placer entre les points. Il n'est pas spécifié que les segments ne doivent pas se croiser.

Alors les possibilités de connecter n points 2 à 2 est

```
Combinaison(n,k)= (n*(n-1)… (n-k+1)/(1*2*..k)
combinaison(2,n)= (8*(8-2+1)/2 = 28
Combinaison(2,9) = 9*8/2 = 36
```

On rejoint le raisonnement de D. Collignon, l'analyse combinatoire est au programme des 16-18 ans, le Gymnase en Suisse, le Lycée en France.

Et si vous voulez vraiment être sûr, dessinez 9 points sur une feuille de papier et connectez-les 2 à 2, il y aurait 36 connections possibles, on n'en demande que 30, voir figure page précédente

11 - LES CENT MULTIPLES

Mathilde écrit sur des étiquettes les cent premiers multiples non nuls de 2010 en toutes lettres : deux-mille-dix, quatre-mille-vingt, six-mille-trente, ...

Elle classe ensuite ces étiquettes par ordre alphabétique.

Quelle sera sa première étiquette (on écrira la réponse en chiffres) ?

Facile à comprendre, un peu laborieux à exécuter.

Quels sont les chiffres commençant par une lettre du début de l’alphabet ?

Ni a, ni b, alors c, comme cent ou cinq.

A partir du 50$^{\text{ème}}$ multiple, on obtient 100’500, cent-mille-cinq-cent.

Peut-on faire mieux que cent-mille ?

Oui, 102’510 (cent-deux), mais encore mieux:

152’760, le 76$^{\text{ème}}$ multiple: ***cent-cinquante-deux-mille-sept-cent-soixante.***

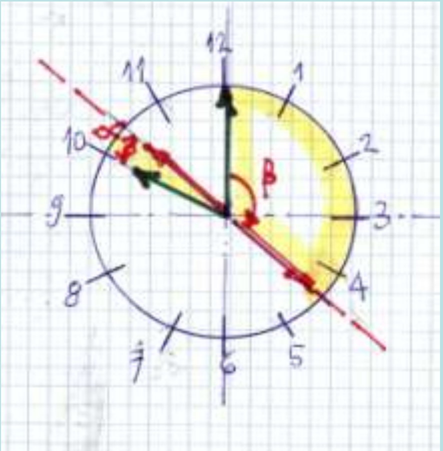
12 - QUELLE HEURE EST-IL ?

Il est entre 10 h 15 et 10 h 30. Sur la pendule qui fonctionne parfaitement, l'aiguille des heures et celles des minutes sont rigoureusement alignées.

Quelle heure est-il, exactement ?

On arrondira, si besoin est, à la seconde la plus proche.

Un bon problème, tout le monde a une montre, on visualise la chose, reste à la traduire en équations. Un os à ronger. Mais d'abord faire un bon dessin.



On fait démarrer la fête à 10:00:00.
L'aiguille des heures est sur le 10, soit à 300°
L'aiguille des minutes est à midi, soit à 0°

Ensuite rassembler quelques outils:
Vitesse de rotation angulaire de l'aguille des heures: vrH = 2*pi/(12*60*60) // radians par seconde, rad/s
Vitesse de rotation de l'aiguille des minutes: vrM = 2*pi/(60*60) // rad/s

Calculer les angles aAlpha et aBeta; a = vr * t // t c'est le temps en secondes

Exprimer que les aiguilles sont sur le même diamètre:
(60° – aAlpha) + aBeta = 180°; aBeta –aAlpha = 2*pi/3 ;

2*pi*t/(60*60) – 2*pi*t/(12*60*60) = 2*pi/3 ;

(t*12) – t = 12*60*60/3 ; t = 1309 s = 21 min 49 s

Réponse ***10 heures 21 min et 49 sec***

Remarque:
On peut généraliser le problème,
Écrire une fonction qui donne l'heure (h:m:s) en fonction de l'heure (entier de 0 à 23) et de l'angle des 2 aiguilles, les valeurs d'angle 0 et 180 degrés sont les plus intéressantes, quand les aiguilles sont superposées ou qu'elles se trouvent sur un diamètre.

Struct(heureMinuteSeconde) = fctHorloge(iHeure, fAngle) ;

La solution D. Collignon

12 Quelle heure est-il ?

Notons $15 \leqslant m \leqslant 30$ le nombre (entier) de minutes et $0 \leqslant s < 60$ le nombre (réel) de secondes. Par rapport au zéro, l'aiguille des minutes (quatrième quadrant) forme un angle de $\frac{360}{60}\left(m + \frac{s}{60}\right) = 6m + \frac{s}{10}$ et l'aiguille des heures (deuxième quadrant) $\frac{360}{12}\left(10 + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}\right) = 300 + \frac{m}{2} + \frac{s}{120}$.
Les aiguilles forment un angle plat s'écrit $6m + \frac{s}{10} + 180 = 300 + \frac{m}{2} + \frac{s}{120}$, d'où $11s = 60\,(240 - 11m)$. La partie droite étant entière, il existe un entier $0 \leqslant k < 660$ tel que $11s = k$. Ainsi $m = 22 - \frac{120+k}{660}$. La seule possibilité pour que m soit entier est $k = 540$, d'où $m = 21$ et $s = 49 + \frac{1}{11}$.
Il est donc 10h21m49s.

Autre méthode, même résultat (bien entendu !).

13 - BON JEU !

Dans ce cryptarithme, chaque lettre remplace un chiffre de 0 à 9. Deux lettres différentes remplacent toujours deux chiffres différents et aucun nombre ne commence par un zéro.

Combien vaut MATH, au maximum ?

$$\begin{array}{rr} & 2011 \\ + & BON \\ + & JEU \\ \hline = & MATH \end{array}$$

Au premier abord, pas trop difficile, mais méfions-nous.

Placer M=3, B=9, J=8, A=7

Restent 0, 1, 2, 4, 5, 6

Tâtonner un peu, et proposer:

$$\begin{array}{rr} & 2\ 0\ 1\ 1 \\ + & 9\ 5\ 1 \\ + & 8\ 0\ 2 \\ \hline = & 3\ 7\ 6\ 4 \end{array}$$

La solution D. Collignon

13 Bon jeu !

Les unités apportent au plus 1 de retenue car $1+N+U \leqslant 1+8+9 < 20$. De même pour les dizaines et les centaines car $1+1+O+E < 20$ et $1+B+J < 20$. Raisonnablement nous pouvons espérer $M = 3$. Peut-on avoir $A = 8$ ou 9 ? Non car $1 + B + J < 18$.

Essayons alors $A = 7$, de sorte que $\{B, J\} = \{8, 9\}$. Tentons $T = 6$.

Modulo 9, $BON+JEU+MATH \equiv 0+\cdots+9 \equiv 0$ et $4+BON+JEU \equiv MATH$, d'où $MATH \equiv 2$. Donc $H = 4$ et $\{O, E, N, U\} = \{0, 1, 2, 5\}$.

Puisque $1 + N + U < 10$, alors $1 + O + E = 6$ et $\{O, E\} = \{0, 5\}$.

Enfin $\{N, U\} = \{1, 2\}$ est bien compatible avec $1 + N + U = 4$.

MATH vaut donc au maximum 3764, par exemple 2011+801+952.

Les méthodes se rejoignent.