# Quarts de finale 25e championnat

Daniel Collignon

26 février 2011

## 1 Les quatre jetons

Le carré se reconstitue aisément grâce à la diagonale $3 = 1 + 2$ et la ligne $1 = 0 + 1$. Puis on place le 1 restant.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 2 | 1 |

## 2 Chocolat

Les cinq morceaux totalisent $3 + 4 + 6 + 10 + 11 = 34$ carrés. Examinons les différentes possibilités.

| Mathias | Matthieu | Mathilde |
|---|---|---|
| $11 + 6$ | $10 + 4 + 3$ | 0 |
| $11 + 3$ | $10 + 4$ | 6 |
| 10 | $6 + 4$ | $11 + 3$ |

Mathilde mangeant *les carrés restants*, la solution 0 doit être écartée.

## 3 Le blason de Mathias

En prenant le centre du carré comme origine du plan complexe O, le demi-tour (ou symétrie centrale) autour de O transforme $z$ en $-z$ et la symétrie axiale (ou réflexion) selon l'axe des nombres imaginaires transforme $z$ en $-\overline{z}$. La composée des 2 transforme $z$ en $\overline{z}$, ce qui est équivalent à une symétrie axiale selon l'axe des nombres réels.
Le bon dessin est alors le numéro 5.

## 4 Palindrome

L'année détermine de manière unique un palindrome, mais il reste à vérifier que la date est valide. Après 2010, c'est le cas dès 2011, le 11 février, avec 11022011.

## 5 Le poisson

Commençons par déterminer l'aire du poisson. Une première façon de s'y prendre est de considérer un rectangle $4 \times 6$ auquel on enlève quatre demi-carrés de côté $1, 2, 2$ et $2\sqrt{2}$, et un demi-rectangle $1 \times 2$, d'où une aire de $24 - \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2\right) = 14,5$.
Une autre façon est d'utiliser le théorème de Pick, en comptant 7 points intérieurs et 17 points sur la frontière, nous retrouvons une aire de $7 + \frac{17}{2} - 1 = 14,5$.
Seule la forme numéro 5 possède une aire équivalente.

| Forme | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aire | 12 | 14 | 18 | 13,5 | 14,5 | $12 + \frac{9}{8}\pi$ |

## 6 L'âge de Mathias

Puisque $396 = 2^2 3^2 11$, tous les âges sont non nuls et l'un d'entre eux est un multiple de 11. Comme $11k + 1 + 1 > 23$ pour $k > 1$ entier, un des âges est 11. Nécessairement Mathias a 11 ans car $1 + 11 + 12 > 23$.
Remarque : pour être complet, déterminons les âges des 2 soeurs, racines du trinôme $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$, c'est-à-dire 6 ans. Les soeurs jumelles sont bien plus jeunes que Mathias.

## 7 Les timbres

Les six timbres totalisent $2\,(3 + 5 + 9) = 34$ ludos. Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude des sommes de 8 à 17 réalisées avec 2 à 4 timbres, car en passant au complémentaire à 34 (ce qui revient à inverser les croix dans le tableau), nous réaliserons les sommes de 17 à 34 dans les mêmes conditions.

| | 3 | 3 | 5 | 5 | 9 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | X | | X | | | |
| 9 | | | | | X | |
| 10 | | | X | X | | |
| 11 | X | X | X | | | |
| 12 | X | | | | X | |
| 13 | X | | X | X | | |
| 14 | | | X | | X | |
| 15 | X | X | | | X | |
| 16 | X | X | X | X | | |
| 17 | X | | X | | X | |

Seule la somme 9 est réalisable avec 1 timbre, et par conséquent la somme 25 ne peut être réalisée, nécessitant alors 5 timbres.

# 8 Au musée

Lors du passage du 31 d'un mois au 1 du mois suivant, c'est le seul cas où il peut y avoir 2 jours impairs consécutifs, contrairement aux jours pairs toujours précédés et suivis d'un jour impair.
Lorsqu'un mercredi ou un samedi est pair, la veille ou le lendemain sont impairs et donc non travaillés.
Dans le cas contraire, la veille ou le lendemain sont des jours pairs, mais pas l'avant-veille ou le surlendemain qui, de plus, ne sauraient être un mercredi ou un samedi (étant distants d'au moins 3 jours).
Vendredi 28, samedi 29 et dimanche 30 mai 2010 illustrent ce maximum de 3 jours successifs travaillés.

# 9 Les sept baguettes

Le rectangle aura pour demi-périmètre $\frac{2+4+6+7+8+9+10}{2} = 23$, et donc sa largeur ne saurait excéder 11. Une largeur de 1, 3 ou 5 ne peut être atteinte. Une largeur de 2, 4 ou 7 ne peut être atteinte que d'une seule façon. Il reste à examiner une largeur de :

- $6 = 2 + 4$ avec une longueur de $17 = 7 + 10 = 8 + 9$
- $8 = 2 + 6$ avec une longueur de 15 ne pouvant être atteinte
- $9 = 2 + 7$ avec une longueur de $14 = 4 + 10 = 6 + 8$
- $10 = 2 + 8 = 4 + 6$ avec une longueur de $13 = 4 + 9 = 6 + 7$
- $11 = 2 + 9 = 4 + 7$ avec une longueur de 12 ne pouvant être atteinte

Il y a donc 3 solutions : 13, 14 ou 17.

# 10 Les trente segments

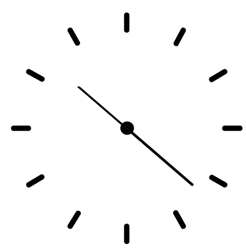
Avec $n$ points, il est possible de constituer au plus $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ segments. Ainsi il est nécessaire que $C_n^2 \geqslant 30$, et comme $C_8^2 = 28$ et $C_9^2 = 36$, d'où $n \geqslant 9$. Réciproquement, en supprimant 6 segments du graphe complet $K_9$, nous en déduisons que 9 est le minimum cherché.

# 11 Les cent multiples

Entre 2010 et 201000, tous les nombres se nommeront « ... mille ... ». Travaillons d'abord sur la partie gauche qui varie de 2 à 201. Dans l'ordre alphabétique, nous avons cent, cinq, cinquante, deux, dix... En tenant compte du mot « mille » et puisque le quatrième chiffre en partant de la droite est toujours pair (sauf pour 201000), nous sommes obligés d'exclure les candidats $105xyz$ et $155xyz$. La plus petite partie gauche sera $152xyz$. Le seul multiple de 2010 de cette forme est 152760 ou encore cent cinquante deux mille sept cent soixante.

## 12 Quelle heure est-il ?

Notons $15 \leqslant m \leqslant 30$ le nombre (entier) de minutes et $0 \leqslant s < 60$ le nombre (réel) de secondes. Par rapport au zéro, l'aiguille des minutes (quatrième quadrant) forme un angle de $\frac{360}{60}\left(m + \frac{s}{60}\right) = 6m + \frac{s}{10}$ et l'aiguille des heures (deuxième quadrant) $\frac{360}{12}\left(10 + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}\right) = 300 + \frac{m}{2} + \frac{s}{120}$.
Les aiguilles forment un angle plat s'écrit $6m + \frac{s}{10} + 180 = 300 + \frac{m}{2} + \frac{s}{120}$, d'où $11s = 60\,(240 - 11m)$. La partie droite étant entière, il existe un entier $0 \leqslant k < 660$ tel que $11s = k$. Ainsi $m = 22 - \frac{120+k}{660}$. La seule possibilité pour que $m$ soit entier est $k = 540$, d'où $m = 21$ et $s = 49 + \frac{1}{11}$.
Il est donc 10h21m49s.



Variante plus simple (inspirée de Claude Villars) :
L'aiguille des heures (resp. minutes) parcourt un tour complet en 12h (resp. 1h), sa vitesse angulaire vaut donc $v_h = \frac{2\pi}{12\times 60\times 60}$ (resp. $v_m = \frac{2\pi}{60\times 60}$).
Nous savons qu'il est 10h et $t$ secondes. Par rapport au zéro, l'aiguille des minutes forme un angle de $v_m t$ et l'aiguille des heures forme un angle de $v_h\,(10\times 60\times 60 + t)$. La condition d'alignement s'écrit alors $v_h\,(10\times 60\times 60 + t) = v_m t + \pi$. Après simplification, il vient $t = \frac{4\times 60\times 60}{11} = 21\times 60 + 49 + \frac{1}{11}$ et nous retrouvons bien l'heure 10h21m49s.

## 13 Bon jeu !

Les unités apportent au plus 1 de retenue car $1+N+U \leqslant 1+8+9 < 20$. De même pour les dizaines et les centaines car $1+1+O+E < 20$ et $1+B+J < 20$. Raisonnablement nous pouvons espérer $M = 3$. Peut-on avoir $A = 8$ ou 9 ? Non car $1 + B + J < 18$.
Essayons alors $A = 7$, de sorte que $\{B, J\} = \{8, 9\}$. Tentons $T = 6$.
Modulo 9, $BON+JEU+MATH \equiv 0+\cdots+9 \equiv 0$ et $4+BON+JEU \equiv MATH$, d'où $MATH \equiv 2$. Donc $H = 4$ et $\{O, E, N, U\} = \{0, 1, 2, 5\}$.
Puisque $1 + N + U < 10$, alors $1 + O + E = 6$ et $\{O, E\} = \{0, 5\}$.
Enfin $\{N, U\} = \{1, 2\}$ est bien compatible avec $1 + N + U = 4$.
MATH vaut donc au maximum 3764, par exemple 2011+801+952.

# 14 Qui perd triple

Notons $(a, b, c)$ l'état des sommes en euros dont disposent Anatole, Béatrice et Camille. A chaque tour, le total des 3 sommes reste constant et vaut $a+b+c = 3^5 + 3^4 + 3 = 327 = 3 \times 109$.
Si Anatole perd à l'état $(a, b, c)$, alors l'état suivant est $(a - 2b - 2c, 3b, 3c)$ qui nécessite que $a - 2b - 2c \geqslant 0$, ou encore $b + c \leqslant 109 \leqslant a$.
Pour que la partie dure le plus longtemps possible, le perdant doit être celui qui possède le plus de jetons, tant qu'il peut tripler les deux autres tas.
Partant de $(243, 81, 3)$, les états suivants sont alors $(75, 243, 9)$, $(225, 75, 27)$, $(21, 225, 81)$, $(63, 21, 243)$ et $(189, 63, 75)$. Après un sixième et ultime jet de dés, le perdant ne pourra plus tripler les deux autres tas (car $63 + 75 > 109$).
L'état précédent $(a, b, c)$ voyant perdre Anatole était $\left(a + \frac{2b}{3} + \frac{2c}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ ou encore $\left(\frac{a}{3} + 218, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$, nécessitant que les trois sommes $a$, $b$ et $c$ soient un multiple de 3. En fonction de qui vient de perdre, il y a donc 3 états possibles antérieurs à $(a, b, c)$. En remontant depuis $\left(3^5, 3^4, 3\right)$, nous pouvons construire un arbre ternaire. Pour que la partie dure le plus longtemps possible, nous retenons les triplets où les trois sommes sont un multiple de 3.
Les états antérieurs sont alors $\left(3^4, 3^3, 3 \times 73\right)$, $\left(3^3, 3^2, 3 \times 97\right)$, $\left(3^2, 3, 3^2 \times 35\right)$, $(3, 3 \times 73, 3 \times 35)$. A ce stade, quel que soit l'état antérieur, l'une des sommes ne sera plus un multiple de 3. Il y a donc eu 5 lancers de dés jusqu'à l'état $\left(3^5, 3^4, 3\right)$.
Chacun des joueurs aura donc lancé au maximum $5 + 6 = 11$ fois les dés.
Remarque : la question aurait dû être plus précise car elle pouvait être comprise « entre l'état initial et $\left(3^5, 3^4, 3\right)$ » (réponse : 5) au lieu d'une partie complète (réponse : 11).

# 15 Huit en deux

Remarquons que la condition revient à ce qu'aucun tas ne contienne 3 jetons dont les numéros formeraient une progression arithmétique.
Les 2 tas ont nécessairement 2 jetons pairs et 2 impairs chacun car sinon un tas aurait 3 jetons de même parité, mais nous allons montrer que cela n'est pas possible avec la condition. Soit un tas $A$ contenant 3 jetons pairs. Après avoir écarté les progressions 2-4-6 et 4-6-8, il reste 2 cas :

- si $\{2, 4, 8\} \subset A$, alors $\{3, 5, 6\} \subset B$ à cause de 2-3-4 et 2-5-8 ; $7 \in A$ à cause de 5-6-7 ; mais impossible de placer 1 à cause de 1-4-7 et 1-3-5.
- si $\{2, 6, 8\} \subset A$, alors $\{4, 5, 7\} \subset B$ à cause de 2-5-8 et 6-7-8 ; $3 \in A$ à cause de 3-4-5 ; mais impossible de placer 1 à cause de 1-2-3 et 1-4-7.

Le même raisonnement s'applique avec 3 jetons impairs en prenant le complémentaire à 9 des numéros.
Avec 2 jetons pairs par tas, il y a 3 possibilités :

- si $\{2, 4\} \subset A$, alors $\{6, 8\} \subset B$, alors $3 \in B$ (2-3-4) et $7 \in A$ (6-7-8).
- si $\{2, 6\} \subset A$, alors $\{4, 8\} \subset B$

– si $\{2,8\} \subset A$, alors $\{4,6\} \subset B$, mais impossible de placer 5 à cause de 2-5-8 et 4-5-6.

De même avec 2 jetons impairs en prenant le complémentaire à 9 des numéros : ils se répartissent entre $\{1,3\}\,\{5,7\}$(complétant le premier cas, mais pas le deuxième à cause de 1-2-3 ou 5-6-7) ou $\{1,5\}\,\{3,7\}$ (compatible dans les 2 sens avec le deuxième cas), d'où 3 répartitions :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 2,4,5,7 | 1,2,5,6 | 2,3,6,7 |
| $B$ | 1,3,6,8 | 3,4,7,8 | 1,4,5,8 |

Il y a donc 3 solutions : 2-4-5-7, 3-4-7-8 ou 2-3-6-7.

## 16 Un homme à la mer

Notons $A$ et $B$ les positions initiales des bateaux Albatros et Bikini, $C$ le point de concours de leurs trajectoires, $M$ (respectivement $N$) le point de départ (resp. d'arrivée) du nageur. Posons $d = MN$ et $\theta = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}\right)$. Rappelons que $AC = 6,5$ et $BC = 24$. Entre la situation initiale et l'instant où le nageur rejoint le Bikini, il s'est écoulé $\frac{6,5-d\cos\theta}{35} + \frac{d}{1,5} = \frac{24-d\sin\theta}{35}$, d'où $d = \frac{105}{140+6(\sin\theta-\cos\theta)}$ qu'il s'agit de minimiser. Or, $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$, l'égalité ayant lieu ssi $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Ainsi, $d_{min} = \frac{105\sqrt{2}}{140\sqrt{2}+12} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ et le temps d'attente avant de nager vaut $\frac{13+d_{min}\sqrt{2}}{70} \approx \frac{1}{5}$ d'heure soit 12 minutes.

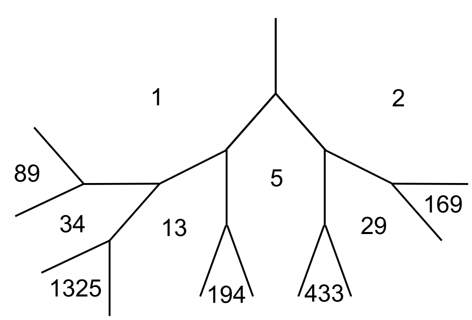

## 17 L'âge de Matt Usalem

Soit l'équation diophantienne $A^2 + B^2 + C^2 = ABC$. Etant invariante par toute permutation des inconnues, nous supposerons que $C \geqslant B \geqslant A \geqslant 0$ et nous cherchons les triplet solutions $(A, B, C)$ tels $80 \leqslant C \leqslant 150$.

Raisonnons modulo 3 en commençant par dresser une table des carrés.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n$ | 0 | 1 | 2 |
| $n^2$ | 0 | 1 | 1 |

Si $ABC \not\equiv 0$, alors $A^2 \equiv B^2 \equiv C^2 \equiv 1$, d'où $ABC = A^2 + B^2 + C^2 \equiv 0$ : contradiction. Ainsi $ABC = A^2 + B^2 + C^2 \equiv 0$, d'où $A \equiv B \equiv C \equiv 0$. Il existe donc trois entiers $a$, $b$ et $c$ tels que $(A, B, C) = (3a, 3b, 3c)$, et nous nous ramenons à l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.
Si $abc = 0$, alors elle admet pour solution $(0, 0, 0)$, et si $a = b = c \neq 0$, alors elle admet pour solution $(1, 1, 1)$.
Soit une solution $(a, b, c)$ telle que $c \geqslant b \geqslant a \geqslant 1$ et $c \geqslant 2$. Pour $a$ et $b$ fixés, $c$ est une racine du trinôme $x^2 - 3abx + a^2 + b^2$. L'autre racine $d = 3ab - c$ est également entière et $d = \frac{a^2+b^2}{c} > 0$.
Par ailleurs, $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 1 + c \leqslant \frac{3c}{2}$, l'inégalité étant stricte puisque $a < b$ ou $b < c$. D'où $cd = a^2 + b^2 < 3abc - a^2 - b^2 = c^2$ et donc $d < c$.
Nous obtenons une autre solution $(a, b, d)$ telle que $\max\{a, b, d\} < \max\{a, b, c\} = c$. En itérant après réordonnement, nous construisons une suite strictement décroissante d'entiers naturels (la suite des maxima) : au bout d'un nombre fini d'étapes, nous aboutissons à la solution $(1, 1, 1)$.
Ainsi toute solution est engendrée par $(1, 1, 1)$ et une succession de transformations parmi $(a, b, c) \mapsto (a, b, 3ab - c)$ ou $(a, 3ac - b, c)$ ou $(3bc - a, b, c)$.
A présent, cherchons les triplets solutions $(a, b, c)$ tels que $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ et $27 \leqslant c \leqslant 50$ : partant de $(1, 1, 1)$, il vient $(1, 1, 2)$, puis nous représentons l'ensemble des solutions sous la forme d'un arbre trivalent infini, trois nombres autour d'un sommet formant un triplet solution. Il y a alors deux triplets solutions, $(2, 5, 29)$ et $(1, 13, 34)$.




Math Usalem a donc 87 ou 102 ans.

## 18 La forêt de Triena

Notons $0 < c - 1 < c < c + 1$ les longueurs (entières) des 3 côtés du triangle, et $h > 2010$ la longueur (entière) de la hauteur relative à $c$.
Le triangle d'aire $a = \frac{1}{2}hc$ a pour périmètre $3c$ et nous déduisons de la formule de Héron la relation $4a^2 = 3c^2\left(\frac{c^2}{4} - 1\right)$, d'où $h^2 = 3\left(\frac{c^2}{4} - 1\right)$. Le membre de gauche étant entier, il existe un entier $x$ tel que $c = 2x$, d'où $\frac{h^2}{3} = x^2 - 1$. Le membre de droite étant entier, il existe un entier $y$ tel que $h = 3y$, d'où $x^2 - 3y^2 = 1$.

Cherchant à minimiser $a$ fonction croissante de $c$ et donc de $x$, il s'agit de trouver la plus petite solution de cette équation de Pell-Fermat, telle que $h > 2010$, c'est-à-dire $y > 670$.
Toute solution $(x_n, y_n)$ s'obtient à partir de la fondamentale $(2, 1)$ selon la relation $x_n + y_n\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$.
D'où la relation de récurrence $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour un calcul des premières solutions (inutile d'aller trop loin, les valeurs croissant très vite).

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 2 | 7 | 26 | 97 | 362 | 1351 |
| $y_n$ | 1 | 4 | 15 | 56 | 209 | 780 |

Ainsi la plus petite solution cherchée est $(x_6, y_6)$, d'où $c = 2702$, $h = 2340$ et l'aire vaut au minimum $a = 3\,161\,340$.